# Coordonnées

Coordonnées *cartésiennes* dans le plan

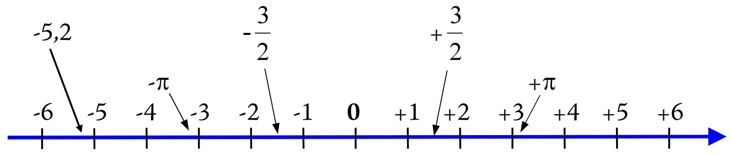
## I. Les coordonnées au collège

**Principe** Les *coordonnées* sont des <u>nombres</u> servant à repérer un *point*. Dans le plan, chaque point a deux coordonnées, appelées *abscisse* et *ordonnée*. Un point ne peut être repéré que *par rapport à* quelque chose. Ce quelque chose s'appelle un *repère*. Au collège, un repère du plan est formé de deux *axes* de même origine. Reprenons tout cela dans l'autre sens :

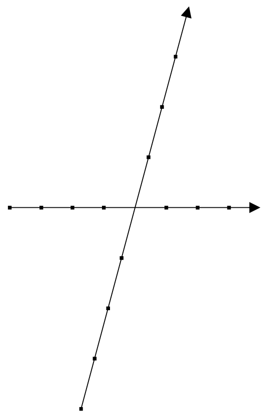
**Axe** Un **axe**, dans ce contexte, est une droite sur laquelle on a choisi un point appelé **origine**, une longueur qui servira d'unité et un sens de parcours, de façon que chaque point de l'axe représente un unique nombre réel et que réciproquement chaque réel soit représenté par un unique point de l'axe (voir chapitre *Les Ensembles*, paragraphe sur les ensembles de nombres.). Le nombre s'appelle l'**abscisse** du point (ou l'**ordonné**, lorsqu'il y a deux axes et que l'on doit distinguer). L'origine est le point qui représente le nombre zéro.

Autrement dit, l'abscisse d'un point est sa distance à l'origine, mesurée avec l'unité choisie, mais <u>munie d'un signe</u>, selon que ce point est situé d'un côté ou de l'autre de cette origine.

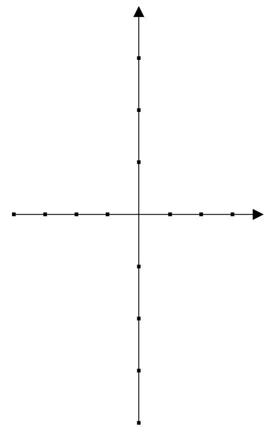




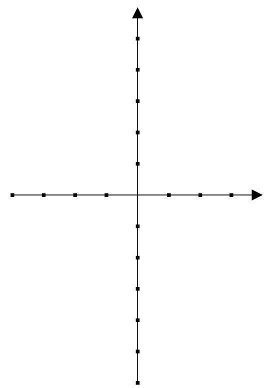

**Repère** Un **repère** du plan est formé de deux *axes* sécants de même *origine*. Le premier, l'axe des *abscisses*, est traditionnellement représenté « horizontalement » sur la feuille (et son sens est généralement celui de la lecture : de gauche à droite). Le second est l'axe des *ordonnées*. Les deux axes du repère ne sont pas forcément perpendiculaires et leur unité n'est pas forcément la même. Si les axes sont perpendiculaires, le repère est dit **orthogonal** ; si de plus l'unité est la même sur les deux axes — et si elle correspond à l'unité de longueur choisie dans le plan, le repère est dit **orthonormé** (ou parfois « orthonormal »).



Repère quelconque



Repère orthogonal



Repère orthonormé

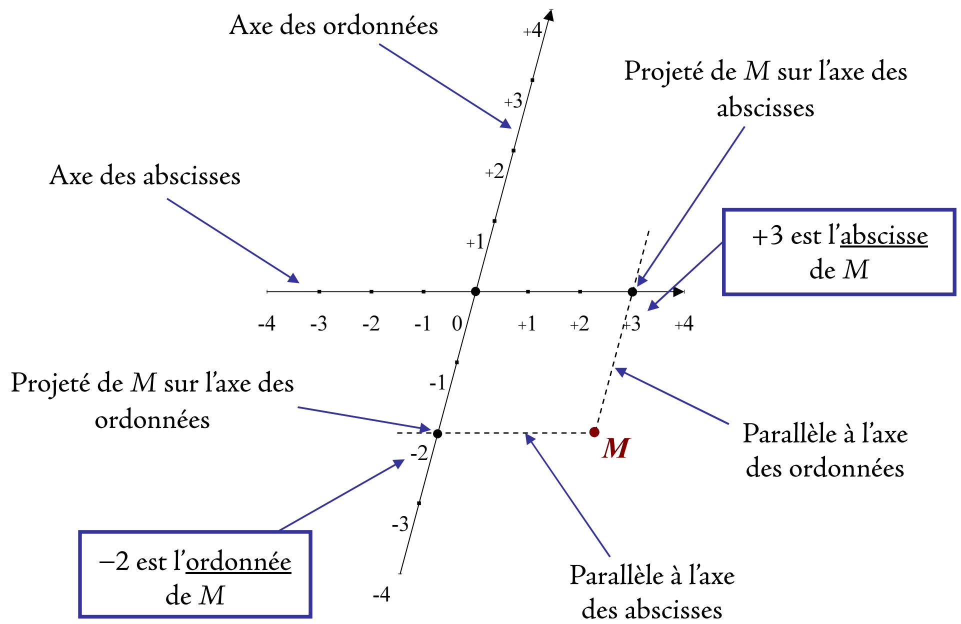
### Coordonnées

Considérons un point $M$ du plan.

Par $M$, on mène la parallèle à l'axe des ordonnées. Cette parallèle coupe l'axe des abscisses en un point qui est appelé le **projeté** de $M$ sur l'axe des abscisses selon la direction de l'axe des ordonnées.

Ce point correspond à un nombre sur l'axe des abscisses, qui est l'**abscisse** de $M$.

De la même façon, en *projetant* $M$ sur l'axe des ordonnées parallèlement à l'axe des abscisses, on obtient l'**ordonnée** de $M$.






### Notation

Pour dire que le point $M$ a pour abscisse 3 et pour ordonnée $-2$, on peut écrire : $M(3;-2)$

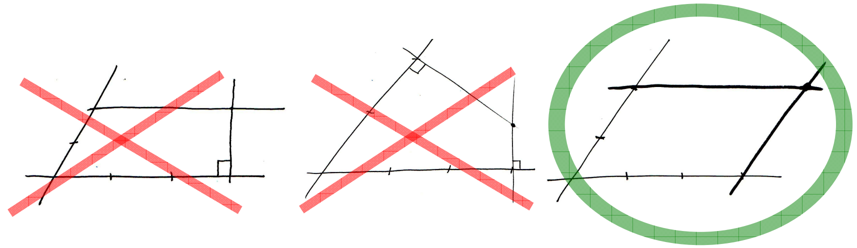
### Remarques

On donne l'abscisse en premier et l'ordonnée en second.

*Abscidere* veut dire couper, en latin (comme dans *abcès*). Les abscisses sont en effet obtenues en *coupant* l'axe (des abscisses) avec des parallèles (à l'axe des ordonnées).

Dans l'exemple, les coordonnées sont des entiers, mais ce n'est pas forcément le cas, bien entendu.

Les repères étant souvent orthogonaux, on pourrait être conduit à croire qu'il faut *projeter* le point $M$ « horizontalement » et « verticalement » sur les axes ; ou encore orthogonalement. Alors qu'on projette parallèlement à l'autre axe.

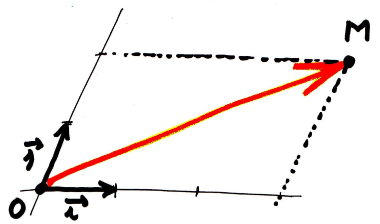


## II. Définition par les vecteurs

### Principe

Les vecteurs permettent de définir très simplement les coordonnées d'un point.

Un *axe* est une droite, qui indique une certaine *direction*, sur laquelle on choisit un *sens* et une *longueur*. Ces informations font penser à celles d'un vecteur. En fait, le choix d'un axe revient au choix d'un vecteur et d'un point (l'origine). La norme de ce vecteur indique l'unité de longueur choisie sur l'axe. Le choix d'un repère du plan peut donc se ramener au choix d'un point et de deux vecteurs. Une fois notre nouveau type de repère ainsi fabriqué, on peut définir les coordonnées d'un point par une simple petite égalité :




Pour aller de $O$ à $M$, on se déplace **3** fois selon le vecteur $\vec{i}$ et **2** fois selon le vecteur $\vec{j}$. Autrement dit : $\boxed{\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} + 2\vec{j}}$.

L'abscisse est alors le *coefficient* qui, dans cette égalité, se trouve devant le premier vecteur du repère et l'ordonnée le *coefficient* devant le second vecteur.

Reprenons cela plus rigoureusement :

### REPÈRE

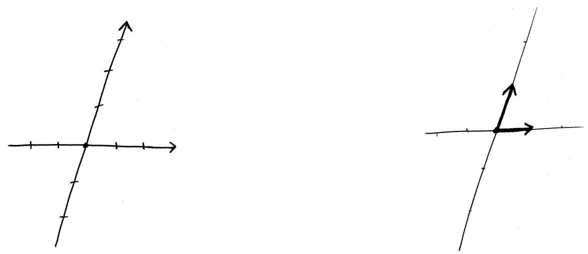
Un **repère** du plan est un *triplet* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, où $O$ est un point du plan, appelé **origine** et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires.

### REMARQUES

Pour le sens du mot *triplet*, voir le chapitre sur *les Ensembles*.

Attention, car désormais, les pointes des flèches sur le dessin marquent des « extrémités de vecteurs » et non simplement le sens choisi sur chaque axe.





Collège Lycée

### DÉFINITION/THÉORÈME

Soit $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ un repère. Soit $M$ un point du plan. Il existe un unique couple de réels $(x;y)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

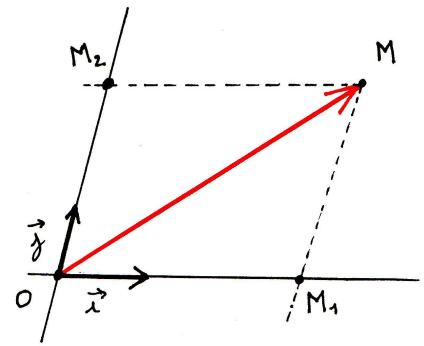
Ce couple $(x;y)$ se nomme **coordonnées** du point $M$.

$x$ se nomme l'**abscisse** et $y$ l'**ordonnée**, de $M$.

### DÉMONSTRATION

#### EXISTENCE

Dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on considère un point $M$. Soit $M_1$ le projeté de $M$ sur l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées. Soit $M_2$ le projeté de $M$ sur l'axe des ordonnées parallèlement à l'axe des abscisses.




$\overrightarrow{OM_1}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires, donc <u>il existe un réel $x$ tel que</u> $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$

$\overrightarrow{OM_2}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires, donc <u>il existe un réel $y$ tel que</u> $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$

Par Chasles : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}$

De plus, $OM_1MM_2$ étant un parallélogramme : $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM_2}$

Donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$

Donc on a : $\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}}$

UNICITÉ

Supposons qu'il existe quatre réels *x*, *y*, *x'* et *y'* tels que $x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Alors : $(x - x')\vec{i} = (y - y')\vec{j}$ (1)

Si l'un des deux nombres $(x - x')$ ou $(y - y')$ était non nul, en divisant par ce nombre les deux membres de l'égalité vectorielle (1), on obtiendrait la colinéarité des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, ce qui contredirait le fait que $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère. Donc $x=x'$ et $y=y'$.

REMARQUE Non seulement *M* n'a qu'un couple de coordonnées, mais encore (et c'est immédiat d'après la définition), il est le seul point à avoir ce couple pour coordonnées. Autrement dit, deux points qui ont les mêmes coordonnées sont égaux.

NOTATION $M(x;y)$ se lit : « *M* a pour coordonnées *x*, *y* ». Le premier nombre est l'abscisse et le second l'ordonnée.

RÉSUMÉ $\boxed{M(x;y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}}$

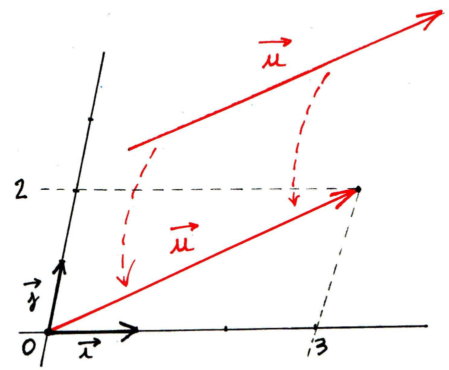
REPÈRES PARTICULIERS

Un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ est dit **orthogonal** lorsque $\vec{i} \perp \vec{j}$ et **orthonormé** lorsque $\vec{i} \perp \vec{j}$ et que de plus $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.



# III. COMPOSANTES D'UN VECTEUR

PRINCIPE Les coordonnées servent à « numériser » un point, c'est-à-dire à capturer son information par des *nombres*. On peut de même « numériser » un vecteur. Pour cela, on pourrait avoir l'idée de donner les coordonnées de l'origine et de l'extrémité de l'un de ses représentants. Mais, avec les quatre nombres obtenus, on aurait alors capté trop d'information, puisque la *position* du représentant ne nous intéresse pas. On peut ramener ces quatre nombres à deux seulement en choisissant, parmi tous les représentants du vecteur, celui dont l'origine est confondue avec celle du repère. Il suffit alors de donner les coordonnées de son extrémité :




$\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$. L'abscisse de $\vec{u}$ est 3 et son ordonnée est 2.

Le vecteur $\vec{u}$ a été « décomposé » selon les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Plutôt que des « coordonnées » d'un vecteur, on parlera plutôt de ses *composantes*.

On peut remarquer, que dans l'égalité « $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ », le point *O* n'intervient pas. La position de l'origine du repère ne change rien aux composantes du vecteur. C'est pourquoi, au lieu d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on peut se contenter de choisir un couple de vecteurs $\left(\vec{i};\vec{j}\right)$. On appelle cela une *base*. Reprenons :

BASE

Une **base** est un couple de vecteurs non colinéaires.

DÉFINITION/THÉORÈME

Soit $\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ une base. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan vectoriel.
Il existe un unique couple de réels $(x;y)$ tel que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$

Ce couple $(x;y)$ se nomme **composantes** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i};\vec{j}\right)$. $x$ se nomme l'**abscisse** et $y$ l'**ordonnée**, de $\vec{u}$.

DÉMONSTRATION

EXISTENCE

Soit $O$ un point du plan. Soit $M$ tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$. Notons $x$ l'abscisse de $M$ et $y$ son ordonnée. On a $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$. Donc $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

UNICITÉ

Même démonstration que pour l'unicité des coordonnées d'un point.

NOTATION

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ se lit : « $\vec{u}$ a pour composantes $x, y$ ». Le nombre du haut est l'abscisse et le celui du bas, l'ordonnée.

RÉSUMÉ

$$\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}}$$



REMARQUES

Le théorème dit qu'il y a toujours une façon et une seule de décomposer un vecteur selon les vecteurs d'une base.

En outre, il est immédiat, par la définition, que deux vecteurs ayant les mêmes coordonnées sont égaux.

Pour un vecteur, on dit normalement *composantes* au lieu de « coordonnées », mais les manuels du lycée disent souvent « coordonnées ».

Les composantes sont normalement écrites en colonne plutôt qu'en ligne (pour des raisons de cohérence avec d'autres notations abordées dans les études supérieures), mais les manuels du lycée les notent en général en ligne.

# IV. FORMULES

Dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on a : $A\left(x_A;y_A\right)$ ; $B\left(x_B;y_B\right)$ ; $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ ; $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$. $\alpha$ est un réel.

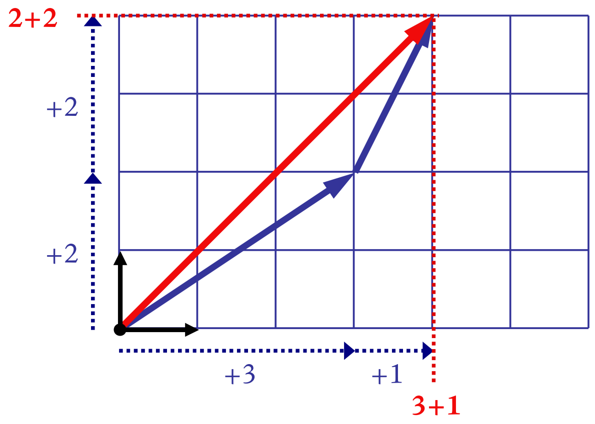
SOMME

$$\boxed{\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\begin{pmatrix}a+a'\\b+b'\end{pmatrix}} \quad (1)$$

L'affirmation ci-dessus dit que, lorsqu'on somme deux vecteurs, leurs abscisses s'additionnent et leurs ordonnées aussi. Autrement dit, l'abscisse de la somme de deux vecteurs est la somme de leurs abscisses et idem pour l'ordonnée.

Ne pas oublier que « $\vec{u}+\vec{v}$ » est un vecteur.

EXEMPLE




DÉMONSTRATION

Par définition des composantes : $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $\vec{v} = a'\vec{i} + b'\vec{j}$

Donc : $\vec{u}+\vec{v} = \left(a\vec{i}+b\vec{j}\right)+\left(a'\vec{i}+b'\vec{j}\right)$

$= a\vec{i}+a'\vec{i}+b\vec{j}+b'\vec{j}$

$= (a+a')\vec{i}+(b+b')\vec{j}$

Par définition des composantes, on a bien : $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \end{pmatrix}$.

## Produit externe

$\boxed{\left(\alpha\vec{u}\right)\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}}$ (2) En particulier $\left(-\vec{u}\right)\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$ (2')

Lorsqu'on multiplie un vecteur par un réel, ses composantes sont chacune multipliées par ce réel.

DÉMONSTRATION

Par définition des composantes : $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$



Donc : $\alpha\vec{u} = \alpha\left(a\vec{i}+b\vec{j}\right)$

$= \alpha a\vec{i}+\alpha b\vec{j}$

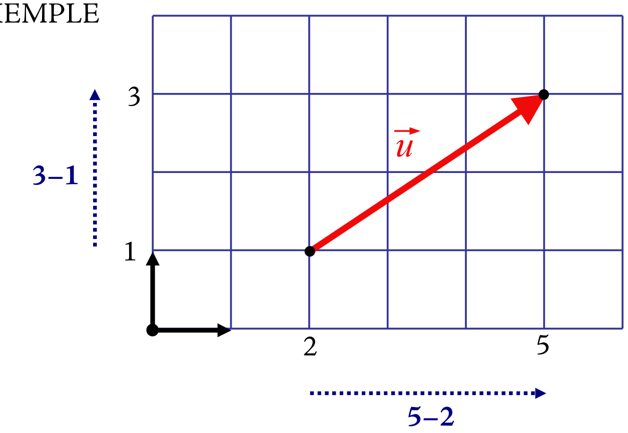
Par définition des composantes : $\left(\alpha\vec{u}\right)\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$.

## Représentant

$\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}$ (3)

L'abscisse d'un vecteur s'obtient en soustrayant l'abscisse de l'origine (d'un de ses représentants) à l'abscisse de l'extrémité (du même représentant). Idem pour l'ordonnée. Attention : c'est « arrivée moins départ » et non le contraire.

EXEMPLE




DÉMONSTRATION

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

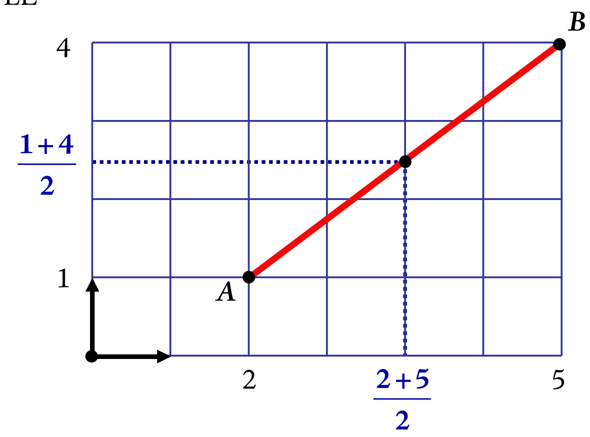
On conclue en appliquant (2') et (1)

## Milieu

Soit $I$ le milieu de $[AB]$. On a : $\boxed{I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$

L'abscisse du milieu d'un segment s'obtient en faisant la moyenne des abscisses de ses extrémités. Idem pour l'ordonnée.

EXEMPLE




DÉMONSTRATION

Rappelons que $O$ est l'origine du repère.

$I$ étant le milieu de $[AB]$, on a :

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

donc :

$$\left(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB}\right) = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

On conclue en appliquant (3), (1) et (2).

## Colinéarité

$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires } \underline{\text{ssi}}\ \ ab' = ba'}$



Deux vecteurs sont colinéaires lorsque leurs composantes sont proportionnelles, ce qu'on peut caractériser simplement par le produit en croix.

DÉMONSTRATION

Si $b \neq 0$ :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires <u>ssi</u> :

Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$

$\Leftrightarrow$ Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} a' = ka \\ b' = kb \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : $a' = ka$ et $\frac{b'}{b} = k$

$\Leftrightarrow$ $a' = \frac{b'}{b}a$

$\Leftrightarrow$ $ab' = ba'$

Si $b = 0$ et $a \neq 0$ : une démonstration similaire à la précédente prouve l'équivalence.

Si $a = 0$ et $b = 0$ : alors $\vec{u}$ est le vecteur nul. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont toujours colinéaires et ça tombe bien, car l'égalité $ab' = ba'$ est toujours vraie.

## Distance

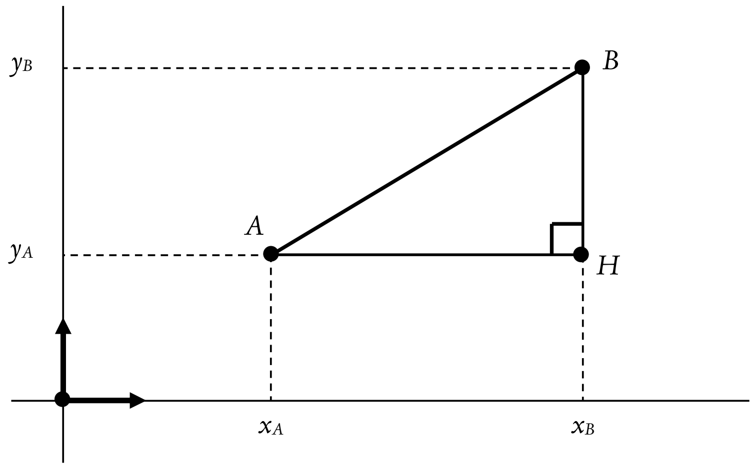
Si $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ est <u>orthonormé</u> : $\boxed{AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}}$

On a aussi : $\boxed{\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2}}$

DÉMONSTRATION

Posons $H(x_B ; y_A)$. On applique le théorème de Pythagore au triangle $ABH$ rectangle en $H$.

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$
$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$




Le triangle est rectangle car le repère est orthogonal. Mais il est important aussi que le repère soit orthonormé, car sinon on ne pourrait pas remplacer $AH^2$ par $(x_B - x_A)^2$ ni $BH^2$ par $(y_B - y_A)^2$.

Pour ceux qui souhaitent aller dans le détail :

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_A - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ 0 \end{pmatrix}$ donc : $\overrightarrow{AH} = (x_B - x_A)\vec{i}$

$$AH = \left\|\overrightarrow{AH}\right\| = \left\|(x_B - x_A)\vec{i}\right\| = |x_B - x_A| \times \left\|\vec{i}\right\|$$
$$= |x_B - x_A| \times \mathbf{1} = |x_B - x_A|$$

Donc $AH^2 = (x_B - x_A)^2$



Pour ce qui est de $\left\|\vec{u}\right\|$, il suffit de poser $M(a;b)$ et d'appliquer la formule précédente à $OM$ :

$$\left\|\vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = OM = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$